Контурдың бұрыштық нүктелері үшін Сохоцкий-Племель формулалары

Контурдың бұрыштық нүктелері үшін $z \in L$ болғанда (26) интегралының мәнінің орнына

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\alpha$$

интегралын қолдану керек, мұндағы α – L контурына t нүктесіндегі оң және сол жанама арасындағы бұрыш.

(27) теңдіктер

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t)$$

теңдіктеріне айналады, бұдан $\Phi^+(t)$ және $\Phi^-(t)$ үшін өрнектерді аламыз:

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \tag{40}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{41}$$

Алынған нәтижені келесі түрде тұжырымдасақ болады.

Теорема. *Егер Коши типтес интеграл, саны ақырлы бұрыштық нүктелері бар контур бойынша алынатын болса, онда интегралдың шектік мәні бар, әрі бұрыштық емес нүктелер үшін қарапайым (28) Сохоцкий-Племель формулалары орындалады, ал бұрыштық нүктелер үшін (40) және (41) формулалар орынды.*

Жасалынған дәлелдемелер шаршы нүктелеріне тікелей өткізіле алмайды. Бірақ қосымша тұжырымдар арқылы, (40) және (41) формулалар бұл жағдайда орынды екендігін көрсетсе болады. Оларда бағытқа қатысты, ұшы контурдан оңға немесе солға бағытталған, $\alpha = 0$ немесе $\alpha = 2\pi$ деп ала салу керек.

Нақты ось бойынша Коши типтес интеграл

$\varphi(\tau)$ – кез-келген ақырлы τ мәнінде Гельдер шартын қанағаттандыратын және $\tau \to \pm\infty$ болғанда анықталатын $\varphi(\infty)$ шегіне ұмтылатын, τ нақты айнымалысы бойынша комплекс функция болсын. Үлкен τ мәнінде

$$|\varphi(\tau)-\varphi(\infty)|\leq\frac{A}{\tau^{\mu}},\mu>0,a>0 \tag{42}$$

теңсіздігі орындалғанын талап етейік. Коши типтес

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{43}$$

интегралын z нақты осте жатпайды деп қарастырайық.

Егер $\varphi(\infty)\neq 0$, онда (43) меншіксіз интегралы жинақталмайды, яғни

$$\int_{N'}^{N"}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

өрнегі, N' және $N"$ бір-бірінен тәуелсіз сәйкесінше $-\infty$ және $+\infty$-ке ұмтылғанда, шекке ұмтылмайды.

Шыныменде,

$$\int_{N'}^{N"}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\int_{N'}^{N"}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau+\varphi(\infty)\int_{N'}^{N"}\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{44}$$

Оң бөліктің бірінші интегралында интеграл астындағы өрнек (42) бойынша өте үлкен $|\tau|$ мәндерінде реті $|\tau|^{-1-\mu}$ болады, сол себепті шексіз шектері бар сәйкес интеграл, меншіксіз интегралдың жинақтылығы туралы белгілі шарты бойынша, жинақталады.

Екінші интегралды есептеу қиын емес:

$$\int_{N'}^{N"}\frac{d\tau}{\tau-z}=\ln(N"-z)-\ln(N'-z)=\ln\frac{|N"-z|}{|N'-z|}\pm i\alpha.$$

Мұндағы α – z нүктесін N' және $N"$ нүктелерімен қосатын түзулер арасындағы бұрыш; екінші мүшені плюс таңбасымен аламыз, егер z жоғарғы жартыжазықтықта жатса, және минус таңбасымен, егер төменгіде жатса. Егер N' және $N"$ (бір-бірінен тәуелсіз) сәйкесінше $-\infty$ және $+\infty$-ке ұмтылса, онда α π-ға ұмтылады, бірақ $\ln\frac{|N"-z|}{|N'-z|}$ ешбір шекке ұмтылмайды, ал бұдан алатынымыз (44) теңдігінің сол жағы да шекке ұмтылмайды.

Енді N' және $N"$ интегралдау шектері шексіздікке симметриялы ұмтылсын, яғни $-N'=N"=N$, онда

$$\lim_{N\to\infty}\ln\frac{|N-z|}{|-N-z|}=\ln 1=0,$$

бұдан алатынымыз

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau\pm i\pi\varphi,$$

таңба жоғарыдағы жол бойынша таңдалынады.

Сол жақтағы өрнек шексіз шектер арасынан алынған (43) интегралдың бас мәні деп аталады. Бұдан әрі қарай шексіз шектер бар интегралдарды үнемі бас мән мағынасында аламыз. Егер сәйкес интеграл меншіксіз ретінде бар болса, онда, бас мән оның мәнімен меншіксіз ретінде сәйкес болатындығы айқын.

Біз (43) интегралының бас мәні бар екендігін анықтадық, және оған қоса

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau\pm\frac{1}{2}\varphi(\infty), \qquad (45)$$

оң жақтағы интеграл – қарапайым мағынадағы интеграл. Егер $\varphi(\infty)=0$, онда (43) интеграл жинақты.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-z)^2}$$

Интегралы, нақты осьте жатпайтын кез-келген z үшін абсолютты жинақталатындықтан, (43) интегралды z параметрі бойынша дифференциалдасақ болады және, сәйкесінше, $\Phi(z)$ жоғарғы және төменгі жартыжазықтықтарда аналитикалық функция болады. Бұл функцияларды сәйкесінше $\Phi^{+}(z),\Phi^{-}(z)$ деп белгілейміз.

Енді $\operatorname{Im} z=0$ деп ұйғарайық, яғни $z=t$ нүктесі интегралдау сызығында орналасқан. Онда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \qquad (46)$$

интегралы ретінде, келесі түрде анықталған бас мәнді түсінеміз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_{t+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right\}.$$

Дербес жағдайда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau-t}=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{\tau-t}d\tau+\int_{t+\varepsilon}^{N}\frac{d\tau}{\tau-t}d\tau\right\}=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}\ln\frac{-\varepsilon(N-t)}{(-N-t)\varepsilon}=0.$$

Бұл теңдікті қолданып,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-t}d\tau+\int_{t+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-t}d\tau\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-t}d\tau+\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-t}d\tau\right\},$$

және соңғы екі интеграл қарапайым мағынада жинақты. $\varepsilon\to 0$ болғанда шектің бар екендігін дәлелдеу үшін 4.п. болған тұжырымдарды қайталасақ болады. Қарастырылып отырған жағдайда, интегралдау контурының шексіз болуы қатты маңызды емес, себебі

$$\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^{\infty}=\left(\int_{-\infty}^{t-A}+\int_{t+A}^{\infty}\right)+\int_{t-A}^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^{t+A}$$

түрлендіруін қолданып, ақырлы контур жағдайына қайта оралсақ болады. Жақша ішіндегі интегралдар ε-ға тәуелді емес, ал басқа екі интеграл қосындысының шегі, алдында анықталғандай, бар. Сонымен, егер $\varphi(\tau)$ жоғарыда тұжырымдалған шарттарды қанағаттандырса, онда интегралдың (46) бас мәні бар.

Шексіз түзіге Сохоцкий-Племель формулаларының ақиқат болатынын оңай көрсетсе болады

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau. \qquad (47)$$

Мұндағы $\Phi^{+}(t)$ және $\Phi^{-}(t)$ – $\Phi(z)$-тің z t-ға жоғарғы(төменгі) жартыжазықтықтан ұмтылғандағы шектері.

$\Phi(z)$ фукнциясының шектік нүкте болатын шексіз алыс нүкте маңайындағы күй-өзгерісін зерттейік. Ол үшін

$$z = -\frac{1}{\zeta}$$

ауыстыруын жүргізейік. $z=\tau$ нүктесі нақты осьті оң бағытта жүріп өткенде, оған сәйкес $\sigma = -1/\tau$ нүктесі де нақты осьті сол бағытта жүріп өтеді.

(43) интегралда айнымалы ауыстырып және

$$\Phi(z) = \Phi\left(-\frac{1}{\zeta}\right) = \Phi^*(\zeta), \varphi(\tau) = \varphi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = \varphi^*(\sigma),$$

белгілеулерін енгізіп,

$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)d\sigma}{\sigma}, \qquad (48)$$

аламыз, барлық алдыңғы интегралдар бас мән ретінде түсініледі. (48)-дің оң жағындағы екінші интеграл тұрақты шама, сол себепті $\Phi(z)$ фукнциясын $z=\infty$ нүктесінде зерттеу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

интегралын $\zeta = 0$ нүктесінің маңайында зерpттеуге алып келеді, яғни бізге таныс сұраққа. $\varphi^*(\sigma)$ функциясы $\sigma = 0$ нүктесінің маңайында Гельдер шартын қанағаттандырсын, яғни

$$|\varphi^*(\sigma_2) - \varphi^*(\sigma_1)| \le B|\sigma_2 - \sigma_1|^{\mu} \ (0 < \mu \le 1).$$

$\varphi(\tau)$ функциясы үшін онда

$$|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| \le B\left|\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right|^{\mu} \ (0 < \mu \le 1)$$

аламыз. Соңғы теңсіздіктен (42) шарты шығатынын байқау оңай.

Егер z жоғарғы немесе төменгі жартыжазықтықта қалып, шексіздікке кез-келген жол бойынша ұмтылса, онда $\zeta \to 0$ және ол да жоғарғы немесе төменгі жартыжазықтықта қалады. Сол себепті (48)-дің оң жағындағы бірінші интегралға (47) формулалардың біріншісін қолдансақ

$$\Phi^{+}(\infty) = \Phi^{*+}(\infty) =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi^{*}(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{*}(\sigma)d\sigma}{\sigma} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{*}(\sigma)d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2}\varphi(\infty)$$

аламыз. Дәл осындай ой-тұжырымды Φ^{-} үшін жасасақ,

$$\Phi^{+}(\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\infty), \;\; \Phi^{-}(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty)$$

аламыз. Бұдан және (47)-ден

$$\Phi^{+}(\infty) = \Phi^{-}(\infty) = 0, \tag{49}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0.$$

Біз нақты осьте Коши типтес интегралмен берілетін интгралмен берілетін функция (49) шартты қажетті түрде қанағаттандыратынын алдық.

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}, \sigma = \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

айнымалы ауыстыруы арқылы, нақты осьте алынған Коши типтес интегралды зерттеуді, ζ жазықтығының бірлік шеңбері бойынша алынған интегралды зерттеуге алып келе алатынымызды байқайық. Дербес жағдайда, осы жерден қосымша зерттеулерсіз, егер интеграл тығыздығы Гельдер шартын қанағаттандырса, онда дәл осы шартқа интегралдың шеттік мәндері де қанағаттандыратынын орнатсақ болады.